MAI 2 - domácí úkol 5

Pokuste se příklady vyřešit jako přípravu na příští cvičení, nebo aspoň formulujte otázky k řešení daných úloh jako

Derivace složené funkce více proměnných:

„Technika“ derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového“ pravidla - jaké to jsou předpoklady?
Pokuste se aspoň několik příkladů „sepsat“ a zjistit, co „nejde“- případné nejasnosti probereme na cvičení.

1. Určete parciální derivace 1.a 2. řádu funkce g, je-li

   (i) $g(x,y) = f(x^2 y, \frac{x}{y})$; (ii) $g(x,y) = f(x^2 + y^2, xy, \frac{y}{x})$; (iii) $g(x,y,z) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$.

2. Určete $g'(x)$ a $g''(x)$, je-li $g(x) = F(x, \varphi(x))$.

3. Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $g(x,y) = F(x, y, \varphi(x,y))$.

2. Implicitní funkce:

(i). Ukažte, že rovnicí $F(x,y) = 0$ je v okolí bodu (x_0, y_0) definována implicitně funkce $y = f(x)$.
Pak aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0 pomocí Taylorova polynomu 2.stupně, když

$$F(x,y) = xy - e^x + e^y, \qquad (x_0, y_0) = (0,0) .$$

(ii) A zkuste:

a) Je dána rovnice

$$e^{z-2x} - xz + 2yz - 2y - xy^2 = 0 .$$

Ukažte, že touto rovnicí je definována implicitně funkce $z = f(x,y) \in C^2(U(1,1))$, pro kterou je $f(1,1) = 2$.

b) Určete $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$.

c) Pomocí lineární aproximace určete přibližně hodnoty $f(x,y)$ v okolí bodu $(1,1)$.